

فهرست

پایه دهم

پاسخنامه

تست

درسنامه

فصل اول

- درس ۱: ترسیم‌های هندسی ۸ ۱۳ ۲۸۴
- درس ۲: قسمت اول: استدلال ۱۶ ۲۰ ۲۸۷
- قسمت دوم: استدلال در هندسه ۲۴ ۲۵ ۲۹۲

فصل دوم

- درس ۱: نسبت و تناسب در هندسه ۲۶ ۲۹ ۲۹۲
- درس ۲: قضیه تالس ۳۲ ۳۸ ۲۹۵
- درس ۳: تشابه مثلث‌ها ۴۷ ۵۳ ۳۰۵
- درس ۴: کاربردهایی از قضیه تالس و ۶۰ ۶۳ ۳۱۱

فصل سوم

- درس ۱: چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آنها ۶۶ ۷۷ ۳۱۳
- درس ۲: مساحت و کاربردهای آن ۸۵ ۹۱ ۳۲۰

فصل چهارم

- درس ۱: خط، نقطه و صفحه ۹۸ ۱۰۵ ۳۲۶
- درس ۲: تفکر جسمی ۱۰۸ ۱۰۹ ۳۲۹
- درس ۳: برش ۱۱۲ ۱۱۴ ۳۳۰
- درس ۴: دوران حول محور ۱۱۶ ۱۱۷ ۳۳۲

پایه یازدهم

پاسخنامه

تست

درسنامه

فصل اول

- درس ۱: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره ۱۲۰ ۱۲۸ ۳۳۵
- درس ۲: رابطه‌های طولی در دایره ۱۳۴ ۱۴۰ ۳۴۰
- درس ۳: چندضلعی‌های محیطی و محاطی ۱۴۵ ۱۵۳ ۳۴۵

فصل دوم

• درس ۱: تبدیل‌های هندسی ۱۵۸ ————— ۱۶۸ ————— ۳۵۰

• درس ۲: کاربرد تبدیل‌ها ۱۷۳ ————— ۱۷۵ ————— ۳۵۵

فصل سوم

• درس ۱: قضیه سینوس‌ها ۱۷۸ ————— ۱۸۰ ————— ۳۵۷

• درس ۲: قضیه کسینوس‌ها ۱۸۲ ————— ۱۸۴ ————— ۳۶۰

• درس ۳: قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و ...) ۱۹۲ ————— ۱۹۴ ————— ۳۶۷

پایه دوازدهم

پاسخنامه

تست

درسنامه

فصل اول

• درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها ۱۹۸ ————— ۲۰۸ ————— ۳۶۹

• درس ۲: دترمینان ۲۱۲ ————— ۲۲۰ ————— ۳۷۴

فصل دوم

• درس ۱: آشنایی با مقاطع مخروطی و ... ۲۲۶ ————— ۲۳۰ ————— ۳۸۱

• درس ۲: دایره ۲۳۱ ————— ۲۳۹ ————— ۳۸۳

• درس ۳: بیضی و سهمی ۲۴۳ ————— ۲۵۲ ————— ۳۸۹

فصل سوم

• درس ۱: معرفی فضای \mathbb{R}^2 ۲۵۸ ————— ۲۶۵ ————— ۳۹۹

• درس ۲: ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها ۲۶۸ ————— ۲۷۸ ————— ۴۰۳

• پاسخنامه کلیدی ۴۱۱

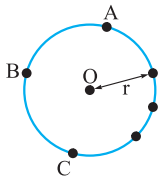


ترسیم‌های هندسی واستدلال

فصل ۱

فاصله‌های مشخص در صفحه

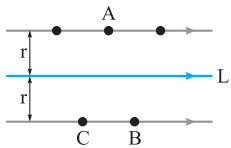
فاصله مشخص از نقطه و خط



در این قسمت می‌خواهیم نقاطی از صفحه را مشخص کنیم که از یک نقطه یا یک خط در آن صفحه به فاصله معلوم و مشخصی باشند.

۱. فاصله مشخص و معلوم از یک نقطه نقاطی از صفحه که از نقطه ثابت O در آن صفحه به فاصله معلوم r هستند، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع r قرار دارند.

نمونه نقاط A, B, C و ... در شکل مقابل.



۲. فاصله مشخص و معلوم از یک خط نقاطی از صفحه که از خط L در آن صفحه به فاصله معلوم r هستند، روی دو خط به موازات L و به فاصله r در طرفین L قرار دارند.

نمونه نقاط A, B, C و ... در شکل مقابل.

نکته معمولاً در تست‌ها دنبال نقاطی از یک شکل هندسی هستیم که از یک نقطه از آن شکل یا یک ضلع یا قطر آن به فاصله معلوم r هستند. در این موارد نقطه یا نقاط تلاقی حاصل از رسم دایره یا رسم دو خط موازی با شکل هندسی، در صورت وجود، نقطه یا نقاط مدنظر سؤال هستند.

تست روی محیط مربعی به ضلع ۲ واحد، دو نقطه وجود دارد که به فاصله ۲/۵ واحد از یک رأس مربع قرار دارند. فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا هر یک از این نقاط کدام است؟

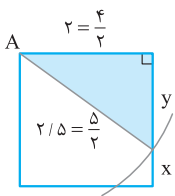
(ریاضی ۹۵)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

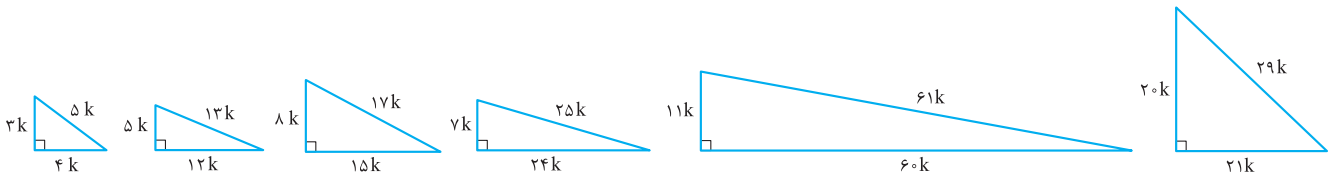
$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$



پاسخ گزینه «۲» ابتدا دو نقطه مورد نظر را روی اضلاع مربع معلوم می‌کنیم. برای این کار دایره‌ای به مرکز رأس A و شعاع ۲/۵ رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه رنگی $y = \frac{3}{4}$ است. (اعداد ۳، ۴ و ۵ اعداد فیثاغورسی هستند، پس هر مفرب غیر صفری از آن‌ها یعنی $\frac{3}{4}$ ، $\frac{4}{5}$ و $\frac{3}{5}$ نیز فیثاغورسی می‌باشند). فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا یکی از این نقاط برابر x است که

$x = 2 - y = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ می‌باشد.

یادآوری به اعداد a, b, c که در رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ صدق می‌کنند، اعداد فیثاغورسی می‌گویند. در واقع این اعداد طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌باشند. توجه کنید که اگر a, b, c اعداد فیثاغورسی باشند، هر مضرب غیر صفری از آن‌ها نیز فیثاغورسی هستند. اعداد فیثاغورسی معروف را ببینید:



تست مربع ABCD به ضلع ۳ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع ABCD وجود دارد که فاصله‌اش از قطر BD برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد؟

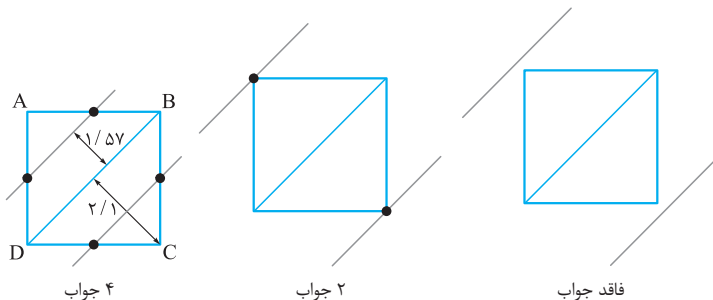
صفر (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)

پاسخ گزینه «۱» کافی است دو خط به موازات قطر AC و در طرفین آن و به فاصله $\frac{\pi}{4} = 1/57$ از آن رسم کنیم و ببینیم این دو خط، مربع را در چند نقطه قطع می‌کنند. می‌دانیم در مربع، قطرهای عمودمنصف یکدیگرند و طول قطر مربع به ضلع ۳ برابر $3\sqrt{2} = 4/2$ است که نصف آن برابر ۲/۱ می‌باشد. چون $1/57 < 2/1$ است، پس این دو خط مطابق شکل مقابل مربع را در چهار نقطه قطع می‌کنند. واضح است که با تغییر اندازه‌ها، مسئله می‌تواند دو جواب یا فاقد جواب باشد.



جواب ۴

جواب ۲

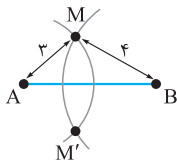
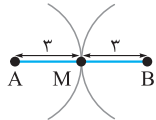
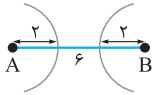
فاقد جواب

نکته اگر در مسئله‌ای دنبال نقاطی هستیم که دارای دو ویژگی باشند، باید نقاط مطلوب هر ویژگی را جداگانه رسم کنیم، آن‌گاه محل تلاقی آن‌ها در صورت وجود، جواب مسئله است.

مثال دو نقطه A و B به فاصله ۶ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد، به طوری که:

الف) به فاصله ۲ واحد از هر کدام از نقاط A و B باشد؟

پ) به فاصله ۳ واحد از A و به فاصله ۴ واحد از B باشد؟



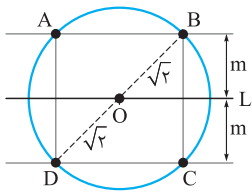
پاسخ الف) نقاطی که به فاصله ۲ واحد از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ واقع‌اند. هم‌چنین نقاطی که به فاصله ۲ واحد از نقطه B قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲ می‌باشند. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، این دو دایره همدیگر را قطع نمی‌کنند. پس هیچ نقطه‌ای با شرایط گفته‌شده وجود ندارد.

ب) نقاطی که به فاصله ۳ واحد از هر یک از نقاط A و B قرار دارند، روی دایره‌هایی به مرکزهای A و B و شعاع ۳ قرار دارند. مطابق شکل مقابل، این دو دایره فقط در نقطه M مشترک‌اند. پس فقط یک نقطه با این شرایط در صفحه وجود دارد.

پ) نقاطی که به فاصله ۳ واحد از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ هستند و هم‌چنین نقاطی که به فاصله ۴ واحد از B قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۴ می‌باشند. با توجه به شکل مقابل، این دو دایره همدیگر را در نقاط M و M' قطع می‌کنند. پس این دو نقطه، نقاط مطلوب ما هستند.

تماماً با فواندن مثال بالا، وضعیت دو دایره که در فصل اول هندسه (۲) فوانده‌اید، در ذهن‌تان تداعی شود.

تست نقطه O روی خط L قرار دارد. نقاطی از صفحه که از نقطه O به فاصله $\sqrt{2}$ و از خط L به فاصله m می‌باشند، رأس‌های یک مربع هستند. m کدام است؟



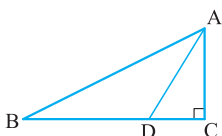
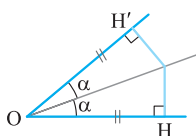
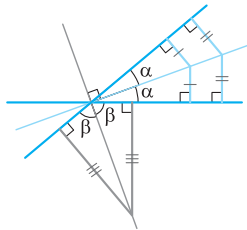
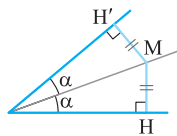
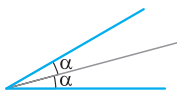
- ۱ (۴) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۱)

پاسخ گزینه «۴» چون ۴ نقطه وجود دارند که هر دو ویژگی را دارا می‌باشند (مربع دارای ۴ رأس است) پس نحوه قرارگیری آن‌ها به صورت مقابل است و طول قطر مربع برابر $2\sqrt{2}$ می‌باشد. پس طول هر ضلع آن برابر ۲ است و داریم:

$$2m = 2 \Rightarrow m = 1$$

نیمساز و عمودمنصف

به کمک مطالبی که در مورد فاصله‌های مشخص از نقطه و خط فرا گرفتیم، می‌توان مجموعه‌ی نقاطی از صفحه را معلوم کرد که آن‌ها نیز از نظر فاصله، ویژگی مشخصی دارند که به صورت زیر هستند:



۱. نیمساز

نیمساز یک زاویه، خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

ویژگی‌های نیمساز یک زاویه

الف) هر نقطه‌ای که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و هر نقطه‌ای که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

$$MH = MH'$$

نتیجه) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع در آن صفحه به یک فاصله هستند، روی نیمسازهای زوایای دو خط متقاطع قرار دارند و در ضمن این نیمسازها بر هم عمود هستند.

ب) اگر از نقطه‌ای دلخواه روی نیمساز، دو عمود بر دو ضلع زاویه رسم کنیم، پاره‌خط‌هایی که روی دو ضلع زاویه ایجاد می‌شوند، با هم برابرند.

$$OH = OH'$$

تست در شکل مقابل، AD نیمساز زاویه BAC است. اگر $AB = AC + 8$ و $BD = DC + 4$ باشد، طول

پاره خط DC کدام است؟

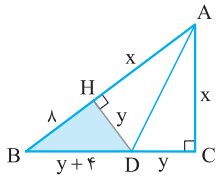
- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

گزینه «۱» با فرض $AC = x$ و $DC = y$ ، مقادیر $AB = x + 8$ و $BD = y + 4$ به دست می‌آیند. چون D روی نیمساز زاویه BAC است، پس از D بر AB عمود می‌کنیم. در این صورت $DH = DC = y$ و $AH = AC = x$ می‌شود.

حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث BHD داریم:

$$BD^2 = HD^2 + HB^2 \Rightarrow (y + 4)^2 = y^2 + 8^2 \Rightarrow y^2 + 8y + 16 = y^2 + 64$$

$$\Rightarrow 8y = 48 \Rightarrow y = DC = 6$$



یادآوری

از یک نقطه در صفحه، بی‌شمار خط می‌گذرد ولی از دو نقطه متمایز در صفحه، یک و فقط یک خط می‌گذرد. بنابراین برای این که یک خط را به طور منحصر به فرد در صفحه مشخص کنیم، نیاز به حداقل دو نقطه از خط داریم.

رسم نیمساز یک زاویه

۱ برای رسم نیمساز زاویه xOy ، به مرکز O شعاع دلخواه کماتی رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده و به مراکز A و B دو کمان می‌زنیم تا همدیگر را در W قطع کنند. از W به O وصل می‌کنیم. OW نیمساز زاویه xOy است زیرا مثلث‌های OAW و OBW به حالت سه ضلع برابر هم‌نهشت هستند، بنابراین $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ است.

۲ برای رسم نیمساز زاویه xOy ، دو خط به فاصلهٔ معلوم r به موازات هر یک از اضلاع زاویه رسم می‌کنیم. این دو خط همدیگر را در نقطهٔ W قطع می‌کنند. از O به W وصل می‌کنیم. OW نیمساز زاویه است. زیرا فاصلهٔ W تا دو ضلع زاویه برابر r است، پس حتماً روی نیمساز زاویه قرار دارد.

تست برای رسم نیمساز یک زاویه به کمک خط‌کش و پرگار نیاز به ترسیم حداقل چند کمان است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

گزینه «۳» با توجه به توضیحات بالا، باید حداقل سه کمان رسم کنیم.

۲. عمود منصف

عمود منصف یک پاره‌خط، خطی است که در وسط پاره‌خط بر آن عمود است.

ویژگی عمود منصف

هر نقطه که روی عمود منصف پاره‌خط AB باشد، از نقاط A و B (دو سر پاره‌خط) به یک فاصله است و همچنین هر نقطه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد، روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد.

مواظب باشید

اگر از هر نقطه روی عمود منصف یک پاره‌خط به دو سر آن وصل کنیم، یک مثلث متساوی‌الساقین حاصل می‌شود.

مواظب باشید

اگر AB وتر یک دایره باشد، مرکز دایره روی عمود منصف وتر AB قرار دارد، زیرا فاصلهٔ مرکز دایره تا نقاط A و B (دو سر پاره‌خط AB) برابر شعاع دایره است. بنابراین برای پیدا کردن مرکز یک دایره می‌توان عمود منصف‌های دو وتر ناموازی از دایره را رسم کرد. محل تلاقی آن‌ها مرکز دایره است.

تست

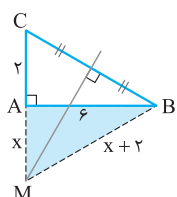
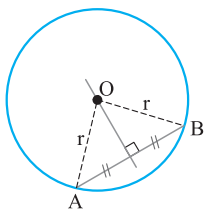
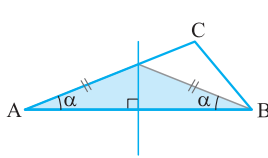
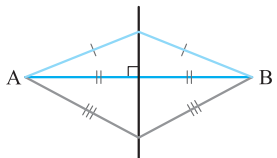
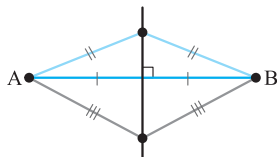
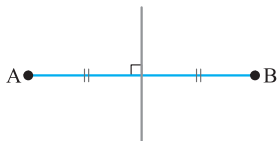
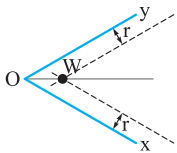
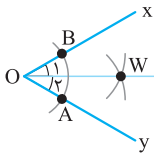
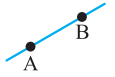
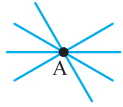
در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۶ و ۲، عمود منصف وتر امتداد ضلع کوچک‌تر را در M قطع کرده است. فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس مثلث کدام است؟

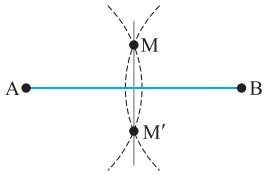
- ۱) $5/7$ ۲) ۸ ۳) $\sqrt{80}$ ۴) $25/3$

پاسخ

گزینه «۲» شکل مسئله را رسم می‌کنیم. فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس مثلث همان MA است. چون M روی عمود منصف BC قرار دارد، پس فاصله‌اش تا دو سر BC برابر است؛ یعنی $MB = MC$ می‌باشد. با فرض $MA = x$ ، $MB = x + 2$ خواهد بود. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث MAB داریم:

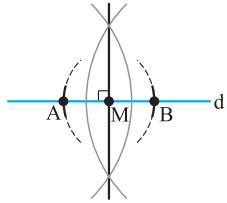
$$MB^2 = MA^2 + AB^2 \Rightarrow (x + 2)^2 = x^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 36 \Rightarrow 4x = 32 \Rightarrow x = 8$$



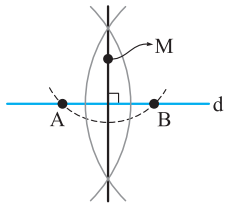


رسم عمودمنصف یک پاره خط برای رسم عمودمنصف پاره خط AB ، دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده و به مراکز A و B دو کمان رسم می‌کنیم. این دو کمان همدیگر را در نقاط M و M' قطع می‌کنند. خط گذرا از M و M' عمودمنصف پاره خط AB است. چون فاصلهٔ M و M' از A و B یکسان است. (توجه کنید که دهانهٔ پرگار را بیش از نصف AB باز کردیم تا دو کمان همدیگر را قطع کنند و نقاط M و M' ایجاد شوند.)

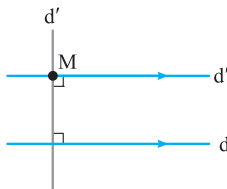
رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط



بعد از این که رسم عمودمنصف یک پاره خط را فرا گرفتیم، می‌توانیم به کمک آن، رسم‌های زیر را انجام دهیم:
۱. رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن ابتدا به مرکز M و شعاع دلخواه یک دایره رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. اکنون M وسط پاره خط AB است. حال اگر عمودمنصف پاره خط AB را به ترتیبی که بلدیم رسم کنیم، آن‌گاه از M گذشته و بر خط d عمود خواهد بود.

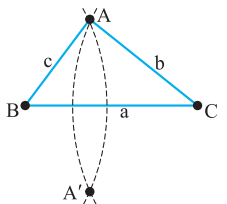


۲. رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن ابتدا به مرکز M و شعاع دلخواه یک دایره رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. (البته شعاع دایره آن قدرها هم دلخواه نیست. باید طول شعاع از فاصلهٔ M تا خط d بیشتر باشد تا دایره خط d را حتماً در دو نقطه قطع کند.) حال عمودمنصف پاره خط AB را به ترتیبی که بلدیم رسم می‌کنیم. عمودمنصف پاره خط AB از نقطهٔ M گذشته و بر خط d عمود است. (چون دایره به مرکز M رسم کردیم و این دایره خط d را در نقاط A و B قطع کرد، پس حتماً $MA = MB$ است و این یعنی M حتماً روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.)



۳. رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطهٔ غیر واقع بر آن ابتدا خط d' را عمود بر خط d و گذرا از نقطهٔ M رسم می‌کنیم. حال خط d'' را گذرا از M و عمود بر d' رسم می‌کنیم. خطوط d و d'' هر دو بر خط d' عمودند، پس طبق عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب d و d'' با هم موازی‌اند. (توجه دارید که برای رسم خطوط عمود، از رسم عمودمنصف کمک می‌گیریم.)

رسم چند ضلعی‌ها



۱. رسم مثلث با معلوم بودن سه ضلع

اگر a ، b و c اندازهٔ اضلاع مثلث ABC باشند، برای رسم آن ابتدا پاره خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم. سپس یک بار به مرکز C و شعاع b و بار دیگر به مرکز B و شعاع c دایره‌ای رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی این دو دایره، رأس A از مثلث ABC است. توجه کنید دو دایره همدیگر را در دو نقطهٔ A و A' قطع می‌کنند اما مثلث $A'BC$ با مثلث ABC هم‌نهشت است و هیچ فرقی با هم ندارند.

در توضیحات بالا واضح است که $b + c$ باید از a بزرگ‌تر باشد تا دو دایره همدیگر را در نقاط A و A' قطع کنند و مثلث ABC یا $A'BC$ تشکیل شود. بنابراین سه عدد حقیقی و مثبت a ، b و c در صورتی اضلاع یک مثلث هستند که هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد.

تست کدام دسته از اعداد زیر می‌توانند سه ضلع یک مثلث باشند؟

۴، ۳، ۱ (۴)

۳، ۲، ۱ (۳)

۶، ۳، ۲ (۲)

۷، ۵، ۳ (۱)

پاسخ گزینهٔ «۱» باید بررسی کنیم که آیا مجموع هر دو عدد از عدد سوم بزرگ‌تر است یا خیر. واضح است که فقط باید بررسی کنیم که بزرگ‌ترین عدد از مجموع دو عدد دیگر، کوچک‌تر باشد (واضح است اگر این نامساوی برقرار باشد، حتماً دو نامساوی دیگر نیز برقرار است):

۱ $۵ + ۳ > ۷$

۲ $۳ + ۲ > ۶$

۳ $۱ + ۲ > ۳$

۴ $۱ + ۳ > ۴$

بررسی گزینه‌ها:

اگر اعداد a ، b و c بخواهند طول اضلاع یک مثلث باشند، باید هر سه نامساوی $a < b + c$ ، $b < a + c$ و $c < a + b$ برقرار باشند (اگر a ، b و c پارامتری نباشند و سه عدد معلوم باشند، فقط کافی است عدد بزرگ‌تر از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد. این مطلب را در مثال بالا دیدید.) حال اگر حداقل یکی از این اعداد پارامتری باشند، دیگر عدد بزرگ‌تر معلوم نیست، پس ناچاریم هر سه نامساوی را بررسی کنیم که وقت‌گیر است. از سه نامساوی فوق می‌توان نتیجه گرفت که هر ضلع مثلث از قدرمطلق تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر و از مجموع آن‌ها کوچک‌تر است. یعنی داریم:

$|a - b| < c < a + b$

$|a - c| < b < a + c$

$|b - c| < a < b + c$

اگر یک ضلع مجهول بود کافی است، ضلع مجهول را بین مجموع و تفاضل دو ضلع معلوم قرار دهیم و هم‌چنین اگر دو ضلع مجهول بود، ضلع معلوم را بین مجموع و قدرمطلق تفاضل دو ضلع مجهول قرار دهیم. اما اگر هر سه ضلع مجهول بود باید هر سه نامساوی $a < b + c$ ، $b < a + c$ و $c < a + b$ را حل کنیم.

مثال در هر مورد حدود x را طوری تعیین کنید که مقادیر داده شده طول اضلاع یک مثلث باشند.

الف) $x, 5$ و 12 ب) $2x, x-1$ و 17 پ) $x+1, 2x+4$ و $4x-3$

$$12 - 5 < x < 12 + 5 \Rightarrow 7 < x < 17$$

پاسخ چون فقط طول یک ضلع مجهول است، داریم:

$$|2x - (x-1)| < 17 < 2x + x - 1 \Rightarrow |x+1| < 17 < 3x-1$$

دو ضلع مجهول داریم، پس:

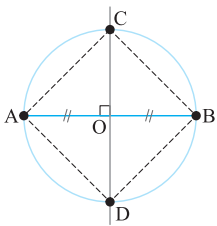
$$\begin{cases} |x+1| < 17 \Rightarrow -17 < x+1 < 17 \Rightarrow -18 < x < 16 \\ 3x-1 > 17 \Rightarrow 3x > 18 \Rightarrow x > 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 6 < x < 16$$

چون هر سه ضلع مجهول هستند، باید هر سه نامساوی $a < b+c, b < a+c, a < b+c$ را چک کنیم:

$$\begin{cases} 4x-3 < (x+1) + (2x+4) \Rightarrow 4x-3 < 3x+5 \Rightarrow x < 8 \\ 2x+4 < (x+1) + (4x-3) \Rightarrow 2x+4 < 5x-2 \Rightarrow x > 2 \\ x+1 < (2x+4) + (4x-3) \Rightarrow x+1 < 6x+1 \Rightarrow x > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2 < x < 8$$

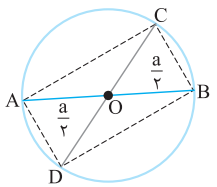
۲. رسم چهارضلعی‌ها

برای رسم چهارضلعی‌ها به کمک خط‌کش و پرگار باید ویژگی‌های آن چهارضلعی را بدانیم و با استفاده از روش رسم‌هایی که تاکنون آموختیم، چهارضلعی را رسم کنیم. در کتاب درسی رسم مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع و لوزی مطرح شده است که در ادامه نحوه رسم آن‌ها را می‌بینیم:



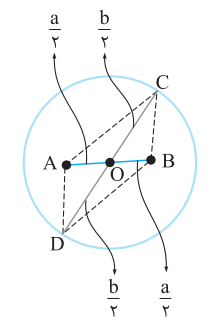
الف. رسم مربع به قطر a (برای رسم، به این ویژگی توجه می‌کنیم که «در مربع، قطرهای عمودمنصف یکدیگرند.»)

ابتدا پاره‌خط AB به طول a را رسم می‌کنیم. سپس عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی این دو را O می‌نامیم. حال به مرکز O و شعاع $\frac{a}{2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند. چهارضلعی $ACBD$ مربعی به قطر a است.



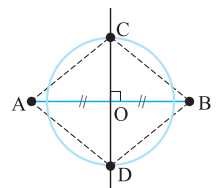
ب. رسم مستطیل به قطر a (برای رسم به این ویژگی توجه می‌کنیم که «در مستطیل، قطرهای با هم برابر و منصف یکدیگرند.»)

پاره‌خط AB به طول a و عمودمنصفش را رسم می‌کنیم تا نقطه وسط پاره‌خط AB یعنی O معلوم شود. البته می‌توانستیم برای پیدا کردن وسط پاره‌خط AB به مرکز A یا B و شعاع $\frac{a}{2}$ یک دایره رسم کنیم. نقطه تلاقی دایره و پاره‌خط AB وسط پاره‌خط AB می‌شود. به مرکز O و شعاع $\frac{a}{2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. حال هر قطر غیرمنطبق و غیرعمود AB (مثلاً قطر CD در شکل مقابل) را رسم می‌کنیم، چهارضلعی $ACBD$ مستطیلی به قطر a خواهد بود.



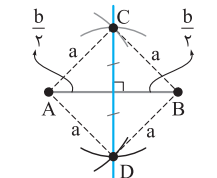
پ. رسم متوازی‌الاضلاع به قطرهای a و b (برای رسم به این ویژگی توجه می‌کنیم که «در متوازی‌الاضلاع، قطرهای منصف یکدیگرند.»)

ابتدا پاره‌خط AB به طول a را رسم می‌کنیم و به کمک رسم عمودمنصف یا دایره‌ای به مرکز A یا B و شعاع $\frac{a}{2}$ وسط AB را معلوم می‌کنیم. به مرکز O و شعاع $\frac{b}{2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. حال هر قطر غیرمنطبق و غیرعمود بر AB (مثلاً قطر CD در شکل مقابل) را رسم می‌کنیم. چهارضلعی $ACBD$ متوازی‌الاضلاعی به قطرهای a و b خواهد بود.



ت. رسم لوزی به قطرهای a و b (برای رسم به این ویژگی توجه می‌کنیم که «در لوزی قطرهای عمودمنصف یکدیگرند.»)

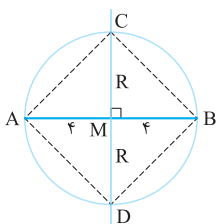
ابتدا پاره‌خط AB به طول a را رسم می‌کنیم. سپس عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کرده و نقطه تلاقی آن‌ها را O می‌نامیم. به مرکز O و شعاع $\frac{b}{2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمودمنصف پاره‌خط AB را در نقاط C و D قطع کند. چهارضلعی $ACBD$ لوزی است.



ث. رسم لوزی به ضلع a و قطر b (برای رسم به این ویژگی‌ها توجه می‌کنیم که در لوزی قطرهای عمودمنصف یکدیگرند و لوزی چهار ضلع برابر دارد.)

ابتدا پاره‌خط AB به طول b و شعاع a را رسم می‌کنیم. سپس عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. حال به مرکز A یا B و به شعاع a دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند. چهارضلعی $ACBD$ لوزی مطلوب است.

مواظب باشید! در تست‌ها می‌توانند روش رسم یک چندضلعی را بیان کرده و از شما نوع چندضلعی یا اطلاعاتی در مورد چندضلعی را بپرسند.



تست پاره‌خط AB به طول 8 مفروض است. عمودمنصف AB آن را در نقطه M قطع می‌کند، به مرکز M و شعاع R یک دایره رسم می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند. اگر چهارضلعی $ACBD$ مربع باشد، R کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۳

پاسخ گزینه «۲» می‌دانیم در مربع، قطرهای با هم برابر و عمودمنصف یکدیگرند. بنابراین با توجه به شکل مقابل، $2R = 8$ و در نتیجه $R = 4$ است.

فاصله‌های مشخص در صفحه

۱- نقطه A به فاصله ۴ واحد از خط d قرار دارد. نقاط M و M' روی خط d و به فاصله ۵ از نقطه A قرار دارند. فاصله MM' کدام است؟

- ۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۴ (۴)

۲- دو نقطه A و B به فاصله ۴ از هم قرار دارند. فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله ۳ از A و $2a - 1$ از B قرار دارد. مقدار a کدام است؟

- ۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ یا ۱ (۴)

۳- نقاط A و B به فاصله ۱۳ از هم قرار دارند. نقاطی که به فاصله ۱۲ از A و به فاصله ۵ از B می‌باشند را معلوم کرده و از آن‌ها به A و B وصل می‌کنیم. مجموع مساحت‌های شکل‌های حاصل کدام است؟

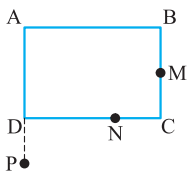
- ۱) ۳۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۶۰ (۴) ۹۰ (۴)

۴- مرکز همه دایره‌هایی که از دو رأس A و B از مربع ABCD می‌گذرند، چگونه‌اند؟

- ۱) روی دایره‌ای به قطر ضلع AB قرار دارند. (۲) روی خطی موازی ضلع AB قرار دارند.
 ۳) روی عمودمنصف ضلع CD قرار دارند. (۴) روی خطی عمود بر ضلع AB قرار دارند.

۵- مربع ABCD به ضلع ۴ مفروض است. مرکز دو دایره از مجموعه دایره‌ی به شعاع ۵ که همگی از رأس A می‌گذرند روی محیط مربع قرار دارد. فاصله مرکزهای این دو دایره کدام است؟

- ۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{2}$ (۴)



۶- در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD مستطیل است و نقاط M، N و P که روی اضلاع مستطیل و امتداد آن‌ها هستند به فاصله برابر از رأس A قرار دارند. اگر $BM = 7$ ، $MC = 8$ و $DP = 10$ باشند، طول پاره‌خط NC کدام است؟

- ۱) ۴ (۲) ۳/۵ (۳) ۲ (۴) ۲ (۴)

۷- روی محیط مستطیلی به ابعاد ۴ و ۸، دو نقطه وجود دارد که به فاصله ۵ از یک رأس آن قرار دارند. فاصله این دو نقطه از هم کدام است؟

- ۱) $2\sqrt{7}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) $2\sqrt{5}$ (۴)

۸- نقطه M درون مربع ABCD به ضلع ۴ قرار دارد. اگر نقاط A، B و وسط ضلع CD از نقطه M به یک فاصله باشند، فاصله M تا مرکز مربع کدام است؟

- ۱) ۰/۵ (۲) ۱ (۳) ۱/۵ (۴) ۲/۵ (۴)

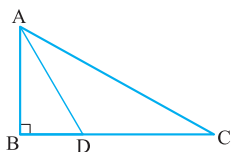
۹- خط d بر دایره C مماس است. m نقطه روی دایره وجود دارد که از خط d به فاصله معلوم L هستند. m کدام نمی‌تواند باشد؟

- ۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۴)

نیمساز و ویژگی‌های آن

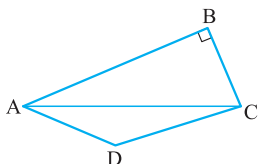
۱۰- در شکل مقابل AD نیمساز زاویه A است. اگر $BD = 4$ و $S_{ABD} + 12 = S_{ADC}$ باشند، طول پاره‌خط CD کدام است؟

- ۱) ۷ (۲) $5\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{13}$ (۴) ۸ (۴)



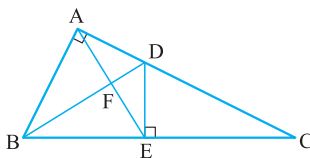
۱۱- در شکل زیر قطر AC نیمساز زاویه A است. اگر $AB = 7$ ، $BC = 3$ و $CD = 5$ باشند، طول ضلع AD کدام است؟

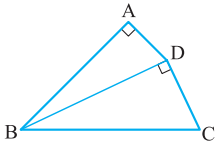
- ۱) ۲ (۲) ۲/۵ (۳) ۳ (۴) ۳/۵ (۴)



۱۲- در شکل زیر، مثلث ABC قائم‌الزاویه و BD نیمساز زاویه B است. اگر $AD = 2$ و $CD = 4$ باشند، طول پاره‌خط AE کدام است؟

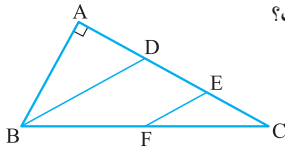
- ۱) ۴ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{5}$ (۴)





۱۳- در شکل مقابل $\hat{A}BD = \hat{C}BD$ است. اگر $AD = 8$ و $CD = 4\sqrt{5}$ باشند، طول ضلع AB کدام است؟

- (۱) $8\sqrt{2}$
 (۲) ۱۲
 (۳) $8\sqrt{3}$
 (۴) ۱۶



۱۴- در شکل مقابل، BD نیمساز زاویه B ، $AB = BF$ ، $DE = EC$ ، $AD = 6$ و $EF = 5$ است. طول پاره خط FC کدام است؟

- (۱) ۶
 (۲) ۷
 (۳) ۸
 (۴) ۹

عمودمنصف و ویژگی‌های آن

۱۵- در مثلث ABC داریم $AB = AC$. عمودمنصف ضلع AC ، ضلع AB را در نقطه D قطع می‌کند. اگر $AD = BC$ باشد، زاویه BAC چند درجه است؟

- (۱) ۱۸
 (۲) ۲۴
 (۳) ۳۲
 (۴) ۳۶

۱۶- در مثلث ABC داریم $AB = AC$ ، $\hat{A} = 80^\circ$ و عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعده BC را در M و N قطع می‌کنند. کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN چند درجه است؟

(ریاضی ۹۲)

- (۱) ۱۵
 (۲) ۲۰
 (۳) ۲۵
 (۴) ۳۰

۱۷- در مثلث ABC داریم $AB = 8$ و $AC = 14$. عمودمنصف ضلع BC ، ضلع AC را در نقطه E قطع می‌کند. محیط مثلث AEB کدام است؟

- (۱) ۲۴
 (۲) ۱۲
 (۳) ۱۱
 (۴) ۲۲

۱۸- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول ضلع کوچک ۴ است. عمودمنصف وتر روی ضلع متوسط دو قطعه ایجاد می‌کند. اگر طول قطعه کوچک‌تر ۲ باشد، طول قطعه بزرگ‌تر کدام است؟

- (۱) ۴
 (۲) $2\sqrt{5}$
 (۳) $2\sqrt{6}$
 (۴) ۵

۱۹- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، عمودمنصف ساق AB ، ارتفاع AH را در نقطه O قطع کرده است. اگر $OA = 5$ و $OH = 3$ باشد، طول ساق مثلث کدام است؟

- (۱) ۶
 (۲) $6\sqrt{3}$
 (۳) ۸
 (۴) $4\sqrt{5}$

۲۰- در مثلث ABC ، $\hat{C} - \hat{B} = 90^\circ$ است. عمودمنصف ضلع BC روی ضلع AB پاره‌خط‌هایی به طول‌های ۱۰ و ۵ ایجاد می‌کند. طول ضلع AC کدام است؟

- (۱) ۸
 (۲) $5\sqrt{2}$
 (۳) $5\sqrt{3}$
 (۴) ۷

۲۱- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۱۲ و b ($b < 12$)، عمودمنصف ضلع بزرگ‌تر امتداد کوچک‌ترین ضلع را در نقطه M قطع می‌کند. اگر فاصله M از نزدیک‌ترین رأس مثلث برابر ۹ باشد، مقدار b کدام است؟

- (۱) ۴
 (۲) ۵
 (۳) ۶
 (۴) ۷

۲۲- در یک مستطیل به اضلاع $4\sqrt{6}$ و ۱۲، عمودمنصف قطر، طول مستطیل را با چه نسبتی قطع می‌کند؟

- (۱) ۴
 (۲) $\frac{2}{5}$
 (۳) ۵
 (۴) $\frac{3}{8}$

۲۳- در مثلث ABC ، $\hat{B} = 15^\circ$ و $\hat{C} = 30^\circ$ است. عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC به ترتیب ضلع BC را در F و K قطع می‌کنند. اگر $BF = 6\sqrt{3}$ باشد، طول پاره خط FK کدام است؟

- (۱) ۱۰
 (۲) ۸
 (۳) ۱۲
 (۴) ۱۴

۲۴- پاره خط AB به طول ۳ مفروض است. نقطه A را نسبت به خطوط گذرنده از نقطه B قرینه می‌کنیم. نقاط حاصل کجا قرار دارند؟

- (۱) روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ (۲) روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۶ (۳) روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۳ (۴) روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۶

ترسیم به کمک خطکش و پرگار

۲۵- در مثلث ABC ، $BC = 7$ و $4AB = 3AC$ می‌باشند. طول ضلع AB چند مقدار صحیح می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۶
 (۲) ۱۷
 (۳) ۱۸
 (۴) ۱۹

۲۶- مثلثی با اضلاع $2x - 1$ ، ۲ و ۵ که در آن x عددی صحیح می‌باشد، چگونه است؟

- (۱) قائم‌الزاویه (۲) متساوی‌الساقین (۳) نامشخص (۴) نشدنی

۲۷- در بین مثلث‌هایی با اضلاع $\frac{3}{5}$ ، ۶ و $5x + 1$ که اندازه محیط آن‌ها مقداری صحیح است، بیشترین مقدار محیط کدام است؟

- (۱) ۱۷
 (۲) ۱۸
 (۳) ۱۹
 (۴) ۲۰

۲۸- سه پاره خط به طول‌های $4x - 4$ ، $x + 7$ و $6x$ اضلاع مثلثی هستند. مقادیر x به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{11}{9} < x < 3$ (۲) $\frac{5}{3} < x < 3$ (۳) $2 < x < 3$ (۴) $\frac{11}{9} < x < 4$

۲۹- به ازای چند مقدار صحیح x ، مثلث ABC به اضلاع ۸ ، $۴x-۱$ و $۲x+۳$ و مثلث $A'B'C'$ به اضلاع $۲x-۲$ ، $۲x+۵$ و ۴ هر دو قابل رسم هستند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۰- محیط مثلثی برابر ۳۰ است. کدام گزینه نمی تواند طول بزرگ ترین ضلع مثلث باشد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۳۱- در شکل مقابل، $CD = DE$ است. طول پاره خط AC چند مقدار صحیح می تواند باشد؟

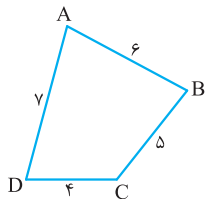
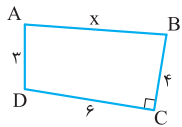
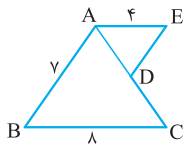
- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۳۲- در شکل مقابل، بیشترین مقدار صحیح x کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۳۳- در چهارضلعی شکل مقابل، بیشترین مقدار صحیح $AC + BD$ کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰



۳۴- در مثلث ABC با $AB = ۴$ و $AC = ۶$ میانه AM را رسم می کنیم. مجموع مقادیر صحیحی که طول میانه AM می پذیرد، کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

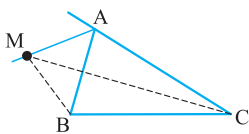
۳۵- در مثلث ABC ، عمودمنصف ضلع AB ، ضلع BC را در نقطه D قطع می کند. اگر $AC = ۶$ و $DC = ۴$ باشند، بیشترین مقدار صحیح برابر طول BC کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۳۶- اندازه ساق های یک دوزنقه ۴ و ۸ و قاعده بزرگ آن ۱۵ است. طول قاعده کوچک آن کدام می تواند باشد؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱۱

(ریاضی خارج ۹۴)



۳۷- در شکل زیر، نقطه M روی نیمساز خارجی زاویه A است. نسبت $\frac{MB+MC}{AB+AC}$ چگونه است؟

- (۱) بزرگ تر از ۱ (۲) کم تر از ۱ (۳) برابر با ۱ (۴) غیرمشخص

۳۸- می خواهیم به کمک خط کش و پرگار، عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنیم. برای این کار نیاز به رسم چند دایره داریم؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۳۹- می خواهیم به کمک خط کش و پرگار از نقطه M روی خط d ، خطی بر آن عمود کنیم. برای این کار نیاز به رسم چند دایره داریم؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۰- برای رسم میانه وارد بر ضلع BC در مثلث ABC به کمک خط کش و پرگار نیاز به زدن چند کمان داریم؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۱- پاره خط AB به طول ۸ مفروض است. عمودمنصف AB آن را در نقطه M قطع می کند، به مرکز M و شعاع R یک دایره رسم می کنیم تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند. اگر چهارضلعی $ACBD$ مربع باشد، R کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) هر مقداری بزرگ تر از ۴

۴۲- پاره خط AB به طول ۵ مفروض است. عمودمنصف AB را رسم می کنیم تا آن را در نقطه M قطع کند. به مرکز M و شعاع ۳ یک دایره رسم می کنیم تا عمودمنصف AB را در C و D قطع کند. چهارضلعی $ACBD$ کدام است؟

- (۱) مربع به قطر ۶ (۲) لوزی به قطرهای ۵ و ۳ (۳) مربع به قطر ۵ (۴) لوزی به قطرهای ۵ و ۶

۴۳- کدام چهارضلعی با معلوم بودن طول یک قطر آن به طور منحصر به فرد مشخص می شود؟

- (۱) لوزی (۲) مربع (۳) مستطیل (۴) متوازی الاضلاع

۴۴- با معلومات $AC = ۱۲$ ، $BD = ۶$ و $AB = a$ ، متوازی الاضلاع $ABCD$ رسم شده است. a کدام نمی تواند باشد؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) ۴

۴۵- متوازی الاضلاعی با طول دو ضلع ۵ و ۹ و طول قطر d رسم شده است. d کدام نمی تواند باشد؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۲ (۳) ۴ (۴) ۱۳

۴۶- با معلومات طول ضلع a و طول قطر کوچک ۶ یک لوزی رسم شده است. a کدام نمی تواند باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴) ۸

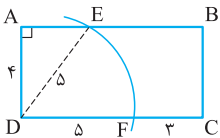
حال از A به M و N وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه ABM داریم:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 \Rightarrow 25^2 = AB^2 + 7^2 \Rightarrow AB^2 = 576 \Rightarrow AB = 24$$

بنابراین طول مستطیل برابر ۲۴ است. با فرض $NC = x$ ، $DN = 24 - x$ می‌شود و در مثلث قائم‌الزاویه ADN قضیه فیثاغورس داریم:

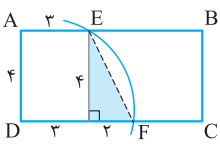
$$AN^2 = AD^2 + DN^2 \Rightarrow 25^2 = 15^2 + (24 - x)^2 \Rightarrow x^2 - 48x + 176 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow NC = 4$$

۷- گزینه ۴ فرض می‌کنیم دو نقطه به فاصله ۵ از رأس D قرار دارند، پس روی دایره‌ای به مرکز D و شعاع ۵ هستند. از D به E وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه DAE داریم:



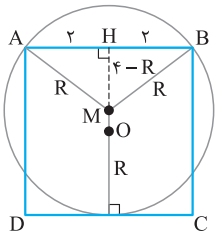
$$DE^2 = AE^2 + AD^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + AE^2 \Rightarrow AE = 3$$

حال از E بر CD عمود می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه رنگی داریم:



$$EF^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow EF^2 = 20 \Rightarrow EF = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۸- گزینه ۱ نقاط A، B و وسط CD روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع R قرار دارند. با توجه به شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویه MBH داریم:

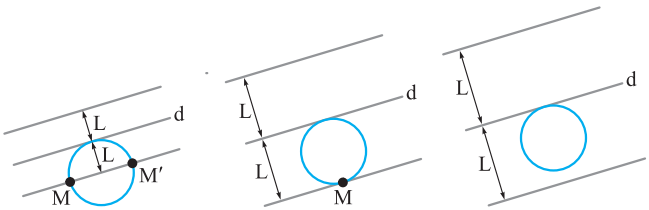


$$R^2 = 2^2 + (R - 2)^2 \Rightarrow R^2 = 4 + R^2 - 4R + 4 \Rightarrow 8R = 20 \Rightarrow R = 2.5$$

حال فاصله M تا نقطه O مرکز مربع برابر است با: $OM = OH - MH \Rightarrow OM = 2 - (2 - R) = R = 2.5$

نتیجه شعاع دایره گذرنده از دو رأس مربع و مماس بر ضلع دیگر آن همواره برابر $R = \frac{5}{8}a$ می‌باشد که a طول ضلع مربع است. اگر این رابطه را می‌دانستیم در سؤال بالا R برابر $R = \frac{5}{8} \times 4 = 2.5$ می‌شد.

۹- گزینه ۴ نقاطی که به فاصله L از خط d قرار دارند، روی دو خط به موازات d و به فاصله L از آن قرار دارند. بنابراین با توجه به صورت سؤال حالات زیر را داریم:



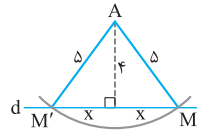
۱۰- گزینه ۳ نقطه D بر روی نیمساز زاویه BAC قرار دارد، پس: $DB = DH = 4$ ، $AB = AH = x$ فرض می‌کنیم $HC = y$ باشد، با توجه به این که مساحت مثلث ADC، ۱۲ واحد بیشتر از مساحت مثلث ABD است، داریم:

$$\frac{4 \times x}{2} + 12 = \frac{(x + y) \times 4}{2} \Rightarrow 2x + 24 = 2x + 2y \Rightarrow y = 6$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه DHC داریم:

$$CD^2 = DH^2 + HC^2 \Rightarrow CD^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow CD = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

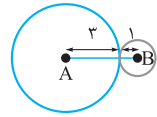
۱- گزینه ۱ نقاط M و M' روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۵ قرار دارند. با توجه به شکل مقابل و استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:



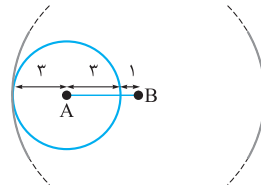
$$5^2 = x^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$

$$d \Rightarrow MM' = 2x = 2 \times 3 = 6$$

۲- گزینه ۴ همه نقاطی که به فاصله ۳ از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ می‌باشند. هم‌چنین تمام نقاطی که به فاصله ۱-۲a از B قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۱-۲a واقع‌اند. در دو حالت این دو دایره فقط یک نقطه مشترک خواهند داشت:



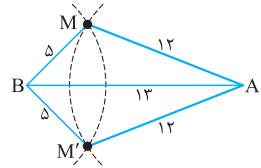
$$2a - 1 = 1 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$



$$2a - 1 = 7 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

توجه کنید که دو دایره برای آن که یک نقطه مشترک داشته باشند یا باید مماس داخل و یا مماس خارج باشند.

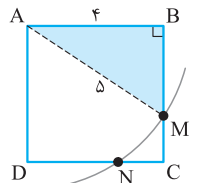
۳- گزینه ۳ باید یک بار به مرکز A و شعاع ۱۲ و بار دیگر به مرکز B و شعاع ۵ دو دایره رسم کنیم. واضح است که این دو دایره همدیگر را در دو نقطه M و M' قطع می‌کنند. اگر از M و M' به A و B وصل کنیم، دو مثلث AMB و M'AB ایجاد می‌شوند که چون $13^2 = 12^2 + 5^2$ است، این مثلث‌ها، قائم‌الزاویه می‌باشند. بنابراین مجموع مساحت‌های آن‌ها برابر است با:



$$S = \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 12\right) \times 2 = 60$$

۴- گزینه ۳ می‌دانیم فاصله مرکز همه دایره‌های گذرنده از دو نقطه A و B تا این دو نقطه برابر شعاع دایره هستند پس با هم برابرند. بنابراین مرکز دایره‌ها روی عمودمنصف ضلع AB و در نتیجه عمودمنصف ضلع CD قرار دارند.

۵- گزینه ۴ مرکز دایره‌هایی به شعاع ۵ که همگی از رأس A می‌گذرند، به فاصله ۵ از A قرار دارند. بنابراین مرکز این دایره‌ها روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۵ هستند. به مرکز A و شعاع ۵ یک دایره رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی این دایره و مربع دو مرکز مطلوب هستند. در مثلث رنگی داریم:



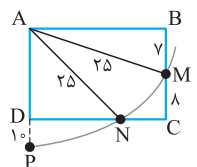
$$5^2 = 4^2 + BM^2 \Rightarrow BM^2 = 9 \Rightarrow BM = 3$$

$$\Rightarrow CM = 4 - 3 = 1$$

به طریق مشابه CO_4 نیز برابر ۱ است. پس فاصله O_4 و O_5 برابر است با:

$$MN^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow MN = \sqrt{2}$$

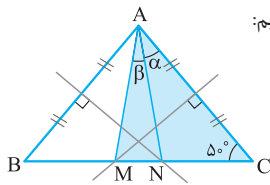
۶- گزینه ۱ نقاط M، N و P روی دایره‌ای به مرکز A قرار دارند. با توجه به این که $BM = 7$ و $MC = 8$ است، پس عرض مستطیل برابر $AD = BC = BM + MC = 7 + 8 = 15$ است.



هم‌چنین در صورت سؤال گفته شده $DP = 10$ است، پس شعاع دایره برابر است با:

$$AP = AD + DP = 15 + 10 = 25$$

۱۶- گزینه ۲ مثلث ABC متساوی الساقین است، پس از $\hat{A} = 80^\circ$ نتیجه می شود $\hat{B} = \hat{C} = 50^\circ$. چون M روی عمودمنصف AC قرار دارد، پس AMC متساوی الساقین می باشد. بنابراین $\alpha + \beta = 50^\circ$ است و در نتیجه زاویه M در این مثلث برابر 80° است. به طریق مشابه در مثلث متساوی الساقین BNA نیز می باشد. حال در مثلث AMN داریم:

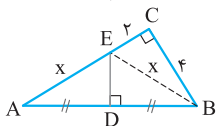


$$\begin{aligned} \hat{N} &= 80^\circ \\ \beta + \hat{M} + \hat{N} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \beta + 80^\circ + 80^\circ &= 180^\circ \\ \Rightarrow \beta &= 20^\circ \end{aligned}$$

۱۷- گزینه ۴ شکل مسئله را رسم می کنیم. چون نقطه E روی عمودمنصف ضلع BC است، پس $EB = EC$ می باشد و داریم:

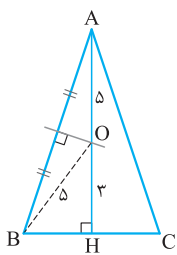
$$\text{محیط ABE} = AB + AE + EB = AB + AC = 8 + 14 = 22$$

۱۸- گزینه ۲ در شکل زیر عمودمنصف وتر، ضلع متوسط را در نقطه E قطع کرده است. از E به B وصل می کنیم. چون E روی عمودمنصف ضلع BC است، پس $EB = EA = x$ است. در مثلث قائم الزاویه BCE داریم:



$$\begin{aligned} BE^2 &= BC^2 + CE^2 \Rightarrow x^2 = 4^2 + 2^2 \\ \Rightarrow x^2 &= 20 \Rightarrow x = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

۱۹- گزینه ۴ شکل مسئله را رسم می کنیم. حال از O به B وصل می کنیم. چون O روی عمودمنصف AB است، پس $OB = OA = 5$. در مثلث قائم الزاویه OHB داریم:

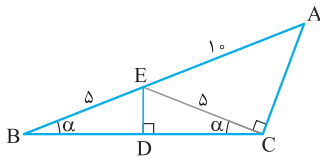


$$\begin{aligned} OB^2 &= OH^2 + BH^2 \Rightarrow 25 = 9 + BH^2 \\ \Rightarrow BH &= 4 \end{aligned}$$

حال در مثلث قائم الزاویه AHB داریم:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB^2 = 64 + 16 = 80 \Rightarrow AB = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

۲۰- گزینه ۳ شکل مسئله به صورت زیر است. از E به C وصل می کنیم. چون E روی عمودمنصف BC است، پس $EB = EC = 5$ می باشد. چون $\hat{C} - \hat{B} = 90^\circ$ است با فرض $\hat{B} = \alpha$ ، زاویه ECD نیز برابر α است و در نتیجه زاویه $ECA = 90^\circ$ است. در مثلث قائم الزاویه ECA داریم:

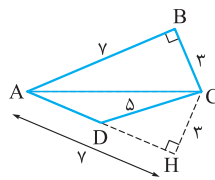


$$\begin{aligned} AE^2 &= EC^2 + AC^2 \\ \Rightarrow 100 &= 25 + AC^2 \\ \Rightarrow AC^2 &= 75 \\ \Rightarrow AC &= \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

۲۱- گزینه ۳ شکل مسئله را رسم می کنیم. عمودمنصف بزرگترین ضلع یعنی وتر مثلث، امتداد ضلع کوچک تر را در نقطه M قطع کرده است. فاصله M از نزدیک ترین رأس مثلث طول MA است، پس $MA = 9$ می باشد. چون M روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد، $MC = MB = b + 9$ می باشد. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه MAC داریم:

$$(b+9)^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow (b+9)^2 = 225 \Rightarrow b+9 = 15 \Rightarrow b = 6$$

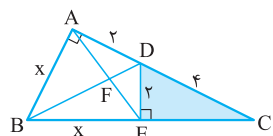
۱۱- گزینه ۳ ضلع AD را امتداد داده و از C عمود CH را بر آن وارد می کنیم.



چون C روی نیمساز A است، پس $CB = CH = 3$ و $AB = AH = 7$ است. در مثلث قائم الزاویه CHD داریم:

$$\begin{aligned} CD^2 &= CH^2 + DH^2 \Rightarrow 25 = 9 + DH^2 \Rightarrow DH = 4 \\ \text{بنابراین طول ضلع AD برابر است با:} \\ AD &= AH - DH = 7 - 4 = 3 \end{aligned}$$

۱۲- گزینه ۲ چون D روی نیمساز زاویه ABC است، پس $DA = DE = 2$ و در نتیجه $\hat{C} = 30^\circ$ و $B = 60^\circ$ است. بنابراین مثلث متساوی الساقین ABE با زاویه رأس 60° متساوی الاضلاع می باشد و این یعنی $AE = x$ است. حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث های DEC و BAC داریم:

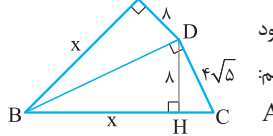


$$\begin{aligned} DC^2 &= DE^2 + CE^2 \Rightarrow 16 = 4 + CE^2 \\ \Rightarrow CE^2 &= 12 \Rightarrow CE = \sqrt{12} \\ BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ \Rightarrow (x + \sqrt{12})^2 &= x^2 + 36 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\sqrt{12}x + 12 = x^2 + 36 \Rightarrow 2\sqrt{12}x = 24$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow AE = 2\sqrt{3}$$

۱۳- گزینه ۴ چون $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$ پس BD نیمساز زاویه ABC است. از D بر BC عمود می کنیم. چون D روی نیمساز زاویه ABC است، داریم:



$$AD = DH = 8, AB = BH = x$$

به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث های قائم الزاویه موجود داریم:

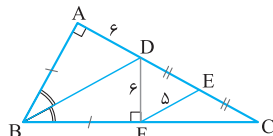
$$\begin{aligned} BD^2 &= AD^2 + AB^2 \Rightarrow BD^2 = 64 + x^2 \\ CD^2 &= CH^2 + DH^2 \Rightarrow (4\sqrt{5})^2 = CH^2 + 8^2 \Rightarrow CH^2 = 16 \\ \Rightarrow CH &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + CD^2 \Rightarrow (x+4)^2 = 64 + x^2 + 80 \Rightarrow 8x = 128 \\ \Rightarrow x &= 16 \end{aligned}$$

البته می توانستیم به جای فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه BDC از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$DH^2 = BH \times HC \Rightarrow 64 = x \times 4 \Rightarrow x = 16$$

۱۴- گزینه ۲ چون D روی نیمساز زاویه B است، پس فاصله اش تا دو ضلع زاویه B برابر است. هم چنین چون $AB = BF$ است، پس F پای عمودی است که از نقطه D بر ضلع BC رسم می شود. بنابراین $DF = DA = 6$ خواهد بود. در مثلث قائم الزاویه DFC، چون $DE = EC$ ، پس EF میانه وارد بر وتر بوده که طول آن برابر نصف وتر است، بنابراین داریم:

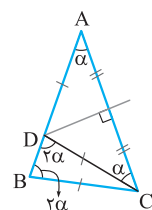


$$EF = \frac{1}{2}DC \Rightarrow 6 = \frac{1}{2}DC \Rightarrow DC = 12$$

حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه DFC داریم:

$$10^2 = 6^2 + FC^2 \Rightarrow FC^2 = 64 \Rightarrow FC = 8$$

۱۵- گزینه ۴ شکل مسئله را رسم می کنیم. چون D روی عمودمنصف پاره خط AC قرار دارد، پس $DA = DC$ می باشد. بنابراین در مثلث های متساوی الساقین ADC و BCD زاویه ها به صورت مقابل هستند. بنابراین داریم:



$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \Rightarrow \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ \\ \Rightarrow 5\alpha &= 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ \end{aligned}$$

۲۹- گزینه ۱ ابتدا حدود x را برای این که مثلث ABC قابل رسم باشد،

$$| (4x-1) - (2x+3) | < 8 < (4x-1) + (2x+3)$$

$$\Rightarrow | 2x-4 | < 8 < 6x+2$$

$$\begin{cases} | 2x-4 | < 8 \Rightarrow -8 < 2x-4 < 8 \Rightarrow -4 < 2x < 12 \\ \Rightarrow -2 < x < 6 \\ 6x+2 > 8 \Rightarrow 6x > 6 \Rightarrow x > 1 \end{cases}$$

اشتراک $\Rightarrow 1 < x < 6$

حال حدود x را برای قابل رسم بودن مثلث $A'B'C'$ تعیین می‌کنیم:

$$| (3x-2) - (2x+5) | < 4 < (3x-2) + (2x+5)$$

$$\Rightarrow | x-7 | < 4 < 5x+3$$

$$\begin{cases} | x-7 | < 4 \Rightarrow -4 < x-7 < 4 \Rightarrow 3 < x < 11 \\ 5x+3 > 4 \Rightarrow 5x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{5} \end{cases}$$

اشتراک $\Rightarrow 3 < x < 11$

برای قابل رسم بودن هر دو مثلث باید اشتراک حدود به دست آمده x برای رسم

$$\begin{cases} 1 < x < 6 \\ 3 < x < 11 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 3 < x < 6$$

دو مقدار $x=4, x=5$ صحیح است.

۳۰- گزینه ۴

نکته

اگر a, b, c طول اضلاع یک مثلث باشند به طوری که $a \geq b \geq c$ ، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} a \geq b \\ a \geq c \end{cases} \Rightarrow 2a \geq b+c \Rightarrow 3a \geq a+b+c \Rightarrow a \geq \frac{\text{محیط}}{3}$$

$$a < b+c \Rightarrow 2a < a+b+c \Rightarrow a < \frac{\text{محیط}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{محیط}}{3} \leq \text{بزرگ‌ترین ضلع} < \frac{\text{محیط}}{2}$$

با توجه به مطلب فوق داریم:

$$\frac{30}{3} \leq \text{بزرگ‌ترین ضلع} < \frac{30}{2} \Rightarrow 10 \leq \text{بزرگ‌ترین ضلع} < 15$$

با توجه به گزینه‌ها بزرگ‌ترین ضلع ۱۵ نیست.

۳۱- گزینه ۲ فرض می‌کنیم $CD = DE = x$ و $AD = y$ است. در مثلث ADE ، $x+y > 4$ است. در مثلث ABC نیز $x+y < 15$ می‌باشد.

پس: $4 < x+y < 15 \Rightarrow 4 < AC < 15$ مقدار ۱۰

۳۲- گزینه ۲ ابتدا به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه BCD طول قطر BD را به دست می‌آوریم:

$$BD^2 = 4^2 + 6^2 = 52 \Rightarrow BD = \sqrt{52}$$

حال در مثلث ABD داریم:

$$BD - AD < AB < BD + AD \Rightarrow \sqrt{52} - 3 < x < \sqrt{52} + 3$$

$$\sqrt{52} = 7.21 \dots \Rightarrow 4.21 \dots < x < 10.21 \dots$$

صیح است. $\max(x) = 10$

۳۳- گزینه ۳ قطر AC را رسم می‌کنیم.

در مثلث ABC داریم:

$$6 - 5 < AC < 5 + 6 \Rightarrow 1 < AC < 11 \quad (1)$$

حال در مثلث ADC می‌توان گفت:

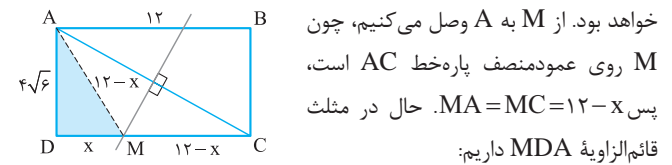
$$7 - 4 < AC < 7 + 4 \Rightarrow 3 < AC < 11 \quad (2)$$

با توجه به نامساوی‌های (۱) و (۲) داریم:

$$3 < AC < 11$$

۲۲- گزینه ۳ در مستطیل زیر، عمودمنصف قطر AC را رسم می‌کنیم تا

طول مستطیل را در نقطه M قطع کند. با فرض $MD = x$ ، اندازه $MC = 12 - x$ خواهد بود. از M به A وصل می‌کنیم، چون



روی عمودمنصف پاره‌خط AC است، پس $MA = MC = 12 - x$ حال در مثلث قائم‌الزاویه MDA داریم:

$$MA^2 = MD^2 + DA^2 \Rightarrow (12-x)^2 = x^2 + (4\sqrt{6})^2$$

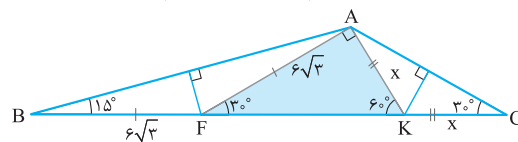
$$\Rightarrow 144 - 24x + x^2 = x^2 + 96 \Rightarrow 24x = 48 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow MD = 2, MC = 10$$

بنابراین نقطه M طول مستطیل را به نسبت $\frac{1}{3} = 5$ قطع می‌کند.

۲۳- گزینه ۳ ابتدا شکل مسئله را رسم کرده و از F و K به رأس A وصل می‌کنیم.

چون F و K روی عمودمنصف‌های AB و AC هستند، پس $FB = FA = 6\sqrt{3}$ و $KA = KC = x$ می‌باشند. زاویه AFK زاویه خارجی مثلث متساوی‌الساقین AFB است، پس $\angle AFK = 30^\circ$ و همچنین زاویه AKF زاویه خارجی مثلث متساوی‌الساقین AKC است، لذا $\angle AKF = 60^\circ$ در مثلث قائم‌الزاویه FAK داریم:



$$\sin 60^\circ = \frac{6\sqrt{3}}{FK} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow FK = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12$$

۲۴- گزینه ۳ وقتی نقطه A نسبت به هر خط

گذرنده از نقطه B قرینه می‌شود تا نقطه A' به دست آید، آن‌گاه آن خط عمودمنصف پاره‌خط AA' است. چون B نقطه‌ای روی عمودمنصف پاره‌خط AA' است، پس $BA = BA'$ می‌باشد. بنابراین نقطه A' روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع $BA = 3$ قرار دارد.

۲۵- گزینه ۲ با توجه به رابطه $4AB = 3AC$ ، فرض می‌کنیم $AB = 3k$ و $AC = 4k$ باشند. بنابراین داریم:

$$4k - 3k < 7 < 4k + 3k \Rightarrow \begin{cases} k < 7 \\ 7k > 7 \Rightarrow k > 1 \end{cases}$$

۱۷ مقدار $3 < AB < 21 \Rightarrow 3 < 3k < 21 \Rightarrow 1 < k < 7$

۲۶- گزینه ۲ حدود x را تعیین می‌کنیم:

$$5 - 2 < 2x - 1 < 5 + 2 \Rightarrow 3 < 2x - 1 < 7 \Rightarrow 2 < x < 4$$

صیح است. $x = 3$

بنابراین به ازای $x = 3$ طول اضلاع مثلث ۵، ۵، ۲ خواهد بود که مثلثی متساوی‌الساقین است.

۲۷- گزینه ۲ حدود محیط را معلوم می‌کنیم تا بیشترین مقدار صحیح آن معلوم شود:

$$6 - 3/5 < 5x + 1 < 6 + 3/5 \Rightarrow 2/5 < 5x + 1 < 9/5$$

$$\Rightarrow 2/5 + 6 + 3/5 < \underbrace{(5x+1) + 6 + 3/5}_{\text{محیط}} < 9/5 + 6 + 3/5$$

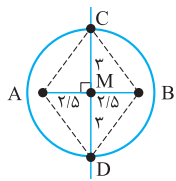
$\Rightarrow 12 < \text{محیط} < 19 \Rightarrow \max(\text{محیط}) = 18$

۲۸- گزینه ۱ باید مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر

باشد. پس:

$$\begin{cases} (4x-4) + (x+7) > 6x \Rightarrow x < 3 \\ (4x-4) + (6x) > x+7 \Rightarrow x > \frac{11}{9} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{11}{9} < x < 3$$

$$(x+7) + (6x) > 4x-4 \Rightarrow x > -\frac{11}{3}$$



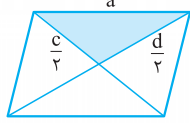
۴۲- گزینه ۴ مطابق شکل مقابل، چهارضلعی ACBD یک لوزی به قطرهای ۵ و ۶ می‌باشد، زیرا قطرهای عمودمنصف یکدیگرند.

۴۳- گزینه ۲ فقط یک مربع با طول قطر d وجود دارد. زیرا در مربع قطرهای با هم برابر و بر هم عمودند. اما در لوزی و متوازی‌الاضلاع طول قطر دیگر را نمی‌دانیم و در مستطیل زاویه بین دو قطر معلوم نیست.

۴۴- گزینه ۳

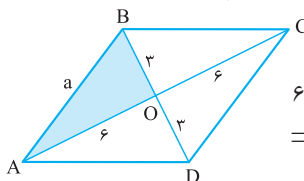
نکته

برای این که ببینیم یک چهارضلعی قابل رسم است یا نه، ابتدا با اطلاعات داده شده چهارضلعی را رسم شده فرض می‌کنیم. حال در چهارضلعی یک مثلث پیدا می‌کنیم که اطلاعات سه جزء مستقل آن معلوم است.



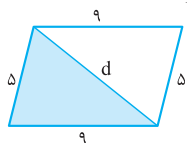
اگر آن مثلث قابل رسم بود، چهارضلعی نیز قابل رسم است. مثلاً برای آن که یک متوازی‌الاضلاع به ضلع a و قطرهای c و d قابل رسم باشد، باید $\frac{c}{۲}$ و $\frac{d}{۲}$ در نامساوی مثلثی صدق کنند.

فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع ABCD به صورت زیر باشد. در ضمن می‌دانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگر هستند. اگر مثلث AOB قابل رسم باشد، متوازی‌الاضلاع ABCD نیز قابل رسم است. بدین ترتیب که ابتدا مثلث AOB را رسم می‌کنیم. سپس AO و BO را به اندازه خود امتداد می‌دهیم تا رأس‌های C و D به دست آیند، حال متوازی‌الاضلاع ABCD مشخص می‌شود. می‌دانیم برای آن که مثلث AOB قابل رسم باشد، باید داشته باشیم:



$$۶ - ۳ < a < ۶ + ۳ \Rightarrow ۳ < a < ۹$$

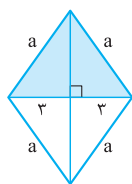
با توجه به گزینه‌ها a نمی‌تواند ۱۰ باشد.



۴۵- گزینه ۳ فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع مطلوب به صورت مقابل باشد، واضح است که اگر مثلث رنگ شده قابل رسم باشد، متوازی‌الاضلاع نیز رسم می‌شود، پس:

$$۹ - ۵ < d < ۵ + ۹ \Rightarrow ۴ < d < ۱۴$$

با توجه به گزینه‌ها d نمی‌تواند ۴ باشد.

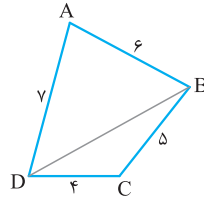


۴۶- گزینه ۱ فرض می‌کنیم لوزی رسم شده به صورت مقابل باشد. اگر مثلث رنگ شده که طول سه ضلع آن را در اختیار داریم قابل رسم شد، لوزی نیز قابل رسم است. پس:

$$a + a > ۶ \Rightarrow ۲a > ۶ \Rightarrow a > ۳$$

با توجه به گزینه‌ها a نمی‌تواند ۳ باشد.

این بار قطر BD را رسم می‌کنیم. در مثلث‌های DAB و DCB داریم:

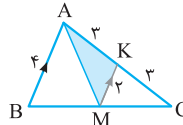


$$\begin{cases} ۷ - ۶ < BD < ۷ + ۶ \\ ۵ - ۴ < BD < ۵ + ۴ \end{cases} \Rightarrow ۱ < BD < ۹ \quad (۳)$$

بنابراین می‌توان گفت:

$$\begin{cases} ۳ < AC < ۱۱ \\ ۱ < BD < ۹ \end{cases} \Rightarrow ۴ < AC + BD < ۲۰$$

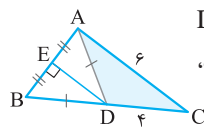
پس بیشترین مقدار صحیح AC + BD برابر ۱۹ می‌باشد.



۳۴- گزینه ۲ در شکل مقابل از M به موازات AB رسم می‌کنیم. بنا بر تعمیم قضیه تالس $AK = CK = ۳$ و $MK = ۲$ می‌شود. در مثلث رنگی داریم:

$$۳ - ۲ < AM < ۳ + ۲ \Rightarrow ۱ < AM < ۵$$

بنابراین مجموع مقادیر صحیح برای AM برابر $۲ + ۳ + ۴ = ۹$ می‌باشد.

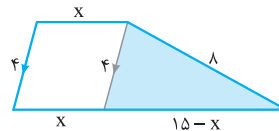


۳۵- گزینه ۲ شکل مسئله را رسم می‌کنیم. از D به A وصل کرده، چون D روی عمودمنصف AB است، پس $DB = DA$ می‌باشد. در مثلث ADC داریم:

$$۶ - ۴ < AD < ۶ + ۴ \Rightarrow ۲ < AD < ۱۰$$

بنابراین بیشترین مقدار صحیح AD برابر ۹ است. چون $BD = AD$ می‌باشد، پس بیشترین مقدار BC برابر $۹ + ۴ = ۱۳$ است.

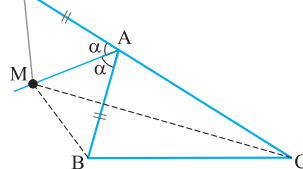
۳۶- گزینه ۳ باید نامساوی مثلثی را روی مثلث رنگ شده شکل زیر اجرا کنیم:



$$\begin{aligned} ۸ - ۴ < ۱۵ - x < ۸ + ۴ \\ \Rightarrow ۴ - ۱۵ < -x < ۱۲ - ۱۵ \\ \Rightarrow ۳ < x < ۱۱ \end{aligned}$$

۳۷- گزینه ۱ روی امتداد پاره خط AC، پاره خط AD را به اندازه AB جدا می‌کنیم. مثلث‌های AMD و AMB همنهشت هستند، بنابراین $MB = MD$ می‌باشد. در مثلث MDC، $MD + MC > DC$ است. چون $MB = MD$ و $AD = AB$ می‌باشند، داریم:

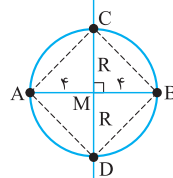
$$\begin{aligned} MD + MC > DC \\ \Rightarrow MB + MC > AB + AC \\ \Rightarrow \frac{MB + MC}{AB + AC} > ۱ \end{aligned}$$



۳۸- گزینه ۱ همان‌طور که در رسم عمودمنصف گفته شد، برای رسم عمودمنصف پاره خط AB کافی است دو دایره با شعاع برابر و بیشتر از نصف طول AB به مراکز A و B رسم کنیم تا یکدیگر را در نقاط M و M' قطع کنند. خط گذرنده از M و M' عمودمنصف پاره خط AB است.

۳۹- گزینه ۲ ابتدا به مرکز M و شعاع دلخواه یک دایره رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند (اکنون M وسط پاره خط AB است). حال اگر عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنیم حتماً از M می‌گذرد و بر خط d عمود است. می‌دانیم برای رسم عمودمنصف نیاز به رسم دو دایره داریم. پس در مجموع نیاز به رسم سه دایره خواهیم داشت.

۴۰- گزینه ۲ کافی است عمودمنصف ضلع BC را رسم کنیم تا نقطه M وسط ضلع BC مشخص شود. پاره خط AM میانه وارد بر ضلع BC است. می‌دانیم برای رسم عمودمنصف ضلع BC نیاز به زدن دو کمان داریم.



۴۱- گزینه ۲ می‌دانیم در مربع، قطرهای با هم برابر و عمودمنصف یکدیگرند. بنابراین با توجه به شکل مقابل $۲R = ۸$ می‌باشد، پس $R = ۴$ است.